

# 有限采样影响下秩减估计器的波达方向估计性能分析

王鼎, 姚晖, 吴瑛

(解放军信息工程大学 信息工程学院, 河南 郑州 450002)

**摘要:** 首先从理论上分析有限采样影响下秩减估计器的波达方向估计性能, 然后基于信号(或噪声)子空间的正交投影矩阵扰动定理, 分别推导秩减估计器方位估计偏差的一阶和二阶闭式表达式, 在此基础上给出其方位估计均方误差、偏置以及测向成功概率的理论计算公式, 最后针对若干重要的秩减估计器给出数值实验, 实验结果验证了所提理论推导的有效性。

**关键词:** 秩减估计器; MUSIC 算法; 有限采样; 均方误差; 偏置; 成功概率

中图分类号: TP911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)03-0053-15

## Direction-of-arrival estimation performance analysis of the rank reduction estimator in the presence of finite samples

WANG Ding, YAO Hui, WU Ying

(Institute of Information System Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** The DOA estimation performance of the rank reduction estimator(RARE) in the case of finite samples was studied. Based on the perturbation theorem associated with the orthogonal projection matrix of the signal (or noise) subspace, the first-order and second-order formulas for the DOA estimation errors of the RARE were derived. Then, the closed-form expressions for mean square error (MSE), bias and direction finding (DF) success probability of the RARE were presented. A variety of numerical experiments concerning some important RARE are conducted to verify the theoretical analysis.

**Key words:** rank reduction estimator; MUSIC algorithm; finite samples; mean square error; bias; success probability

### 1 引言

众所周知, 阵列误差自校正方法需要将信源波达方向(DOA, direction-of-arrival)和阵列误差参数根据某种准则进行联合估计或联合优化<sup>[1~3]</sup>, 其中联合估计所涉及到的高维、多模非线性优化问题往往会带来庞大的运算量, 从而使得算法的实时性和顽健性较差, 全局收敛性也难以得到保证。为了克服阵列误差自校正方法中存在上述问题, 一类所谓“秩减估计器(RARE, rank reduction estimator)<sup>[4~16]</sup>”引起了国内外学者的广泛关注, 其主要优势在于能够实现阵列误差参数和信源方位的联合且“去耦

合”估计, 可避免迭代运算和局部收敛等问题。例如, 文献[4,5]分别针对均匀线阵和均匀圆阵互耦矩阵的特殊结构(Toeplitz 结构), 提出了互耦自校正 RARE; 文献[6~11]分别针对 L 字型阵、Y 字型阵、十字型阵、均匀六边形阵和圆环阵的互耦矩阵特性, 提出了相应的互耦自校正 RARE; 文献[12]提出了累量域互耦自校正 RARE; 文献[13]利用精确校正的辅助阵元提出了一种可用于校正“方位依赖”幅相误差的 RARE, 该方法也称为辅助阵元法(ISM, instrumental sensors method); 文献[14,15]提出了多子阵部分阵列误差的自校正 RARE, 其中的阵列误差包括子阵与子阵之间的阵元位置误差或

收稿日期: 2011-10-11; 修回日期: 2012-11-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61201381); 信息工程学院未来发展基金资助项目(YP12JJ202057)

**Foundation Items:** The National Natural Science Foundation of China (61201381); The Future Development Foundation of Information Engineering College (YP12JJ202057)

幅相误差等；文献[16]则提出了多子阵互耦自校正 RARE 等。上述一系列 RARE 都能够在一定条件下取得较好的效果，并且能够有效避免阵列误差自校正方法中的一些缺点。

根据文献[4~16]中的讨论可知，RARE 可以看成是 MUSIC 算法<sup>[17]</sup>的一种推广，或者说 MUSIC 算法是 RARE 在没有阵列误差条件下的一种特殊形式。由于 MUSIC 算法是一种最为重要的 DOA 估计算法，所以关于其方位估计性能的理论报道相对较多，例如，文献[18,19]利用一阶误差分析方法推导了有限采样影响下 MUSIC 算法的方位估计均方差；文献[20,21]利用二阶误差分析方法推导了有限采样影响下 MUSIC 算法的方位估计偏置等。由于 RARE 是 MUSIC 算法的一种推广，鉴于其在阵列误差自校正方法中的重要性，笔者已在文献[22~24]中从不同方面推导了其性能，其中包括未预期模型误差影响下 RARE 的角度分辨性能<sup>[22]</sup>和 DOA 估计性能<sup>[23]</sup>，以及有限采样影响下 RARE 的角度分辨性能<sup>[24]</sup>。为了保证研究工作的系统性和完整性，本文将从理论上分析有限采样影响下 RARE 的 DOA 估计性能。与文献[22~24]中的分析方法不同的是，本文将基于文献[25]给出的信号(或噪声)子空间正交投影矩阵的扰动定理，分别推导了 RARE 的方位估计均方差、偏置以及测向成功概率的理论表达式，并针对文献[4,5]中的均匀阵列互耦自校正 RARE 和文献[13]中的辅助阵元法给出数值实验。

在讨论主题前，这里先给出一些文中常用符号的定义：1)  $\otimes$  表示矩阵的 Kronecker 积；2)  $\text{vec}(g)$  表示矩阵向量化算子；3)  $N_n(\mu, C)$  表示均值(向量)为  $\mu$ ，方差(矩阵)为  $C$  的  $n$  维高斯分布， $c^2(n, d)$  表示自由度为  $n$ ，非中心参数为  $d$  的卡方分布；4) 向量(或标量)  $\mathfrak{f}(q)$ 、 $\mathfrak{f}''(q)$  和  $\mathfrak{f}'''(q)$  分别表示向量(或标量)  $x(q)$  对  $q$  求一阶、二阶和三阶导数；5)  $o(e)$  表示  $e$  的高阶无穷小，而  $O(e)$  表示  $e$  的等价无穷小。

## 2 预备数学知识

为了描述文中理论推导，本节将引出若干预备命题，它们对于文中的理论分析起着重要的作用。

引理 1<sup>[26]</sup> 设实随机变量  $x \sim c^2(n, d)$ ，则其特征函数为

$$j_x(t) = (1 - 2it)^{-n/2} \cdot \exp\{idt/(1 - 2it)\} \quad (1)$$

引理 1 的证明见文献[26]。

命题 1 设  $n$  维实随机向量  $x \sim N_n(\mu, I_n)$ ，令  $A \in R^{n \times n}$  为对称矩阵，并且满足  $\text{rank}[A] = m$ ，假设  $A$  的  $m$  个非零特征值分别为  $r_1, r_2, \dots, r_m$ ，相应的单位正交特征向量分别为  $e_1, e_2, \dots, e_m$ ，则高斯随机向量二次型  $y = x^T A x$  的特征函数为

$$j_y(t) = \prod_{k=1}^m (1 + 4r_k^2 t^2)^{-1/4} \cdot \exp\left\{-2d_k r_k^2 t^2 / (1 + 4r_k^2 t^2)\right\} \cdot \exp\left\{i \left(\arctan(2r_k t) / 2 + d_k r_k t / (1 + 4r_k^2 t^2)\right)\right\} \quad (2)$$

其中， $d_k = (e_k^T \mu)^2$ 。

命题 1 的证明见附录 A。

命题 2 记两组  $M$  维函数向量为  $\{t_{1k}(q)\}_{k=1}^K$  和  $\{t_{2k}(q)\}_{k=1}^K$ ，现有  $M$  阶 Hermite 常量矩阵  $\hat{?}^\perp$ ，并且该矩阵受误差扰动后可得  $\hat{?}^\perp = ?^\perp - \mathfrak{?}^{(1)} + o(e)$ ，其中， $\mathfrak{?}^{(1)} = o(e)$  为一阶 Hermite 扰动矩阵，而  $o(e)$  表示高阶(大于 1 阶)Hermite 扰动矩阵，分别定义二次标量函数  $f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) = t_{1k}^H(q) ?^\perp t_{2k}(q)$ ， $\hat{f}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) = t_{1k}^H(q) \hat{?}^\perp t_{2k}(q)$  和  $\mathfrak{f}^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) = t_{1k}^H(q) \mathfrak{?}^{(1)} t_{2k}(q)$ ，若记  $\hat{q} = q + q^{(1)} + o(e)$ ，其中， $q^{(1)} = o(e)$  为一阶扰动量，而  $o(e)$  仍表示高阶(大于 1 阶)扰动量，则有

$$\hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) = f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \mathfrak{f}^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - \mathfrak{?}^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + o(e) \quad (k=1, 2, \dots, K) \quad (3)$$

进一步可得

$$\prod_{k=1}^K \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) = \prod_{k=1}^K f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \sum_{k_1=1}^K \left( \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K f(t_{1k_2}(q), t_{2k_2}(q)) \right) \cdot \left( \mathfrak{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - \mathfrak{?}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) \right) + o(e) \quad (4)$$

命题 2 的证明见附录 B。

命题 3 记两组  $M$  维函数向量为  $\{t_{1k}(q)\}_{k=1}^K$  和  $\{t_{2k}(q)\}_{k=1}^K$ ，现有  $M$  阶 Hermite 常量矩阵  $\hat{?}^\perp$ ，并且该矩阵受误差扰动后可得  $\hat{?}^\perp = ?^\perp - \mathfrak{?}^{(1)} - \mathfrak{?}^{(2)} + o(e^2)$ ，其中， $\mathfrak{?}^{(1)} = O(e)$  和  $\mathfrak{?}^{(2)} = O(e^2)$  分

别为一阶和二阶 Hermite 扰动矩阵, 而  $o(e^2)$  表示高阶(大于 2 阶)扰动矩阵, 分别定义二次标量函数  $f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) = t_{1k}^H(q) \hat{?}^\perp t_{2k}(q)$ ,  $\hat{f}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) = t_{1k}^H(q) \hat{?}^\perp t_{2k}(q)$  和  $f^{(i)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) = t_{1k}^H(q) \hat{?}^{(i)} t_{2k}(q) (i=1, 2)$ , 若记  $\hat{q} = q + \hat{q}^{(1)} + \hat{q}^{(2)} + o(e^2)$ , 其中,  $\hat{q}^{(1)} = O(e)$  和  $\hat{q}^{(2)} = O(e^2)$  分别为一阶和二阶扰动量, 而  $o(e^2)$  仍表示高阶(大于 2 阶)扰动量, 则有

$$\begin{aligned} \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) &= f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \\ & \hat{q}^{(1)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - \hat{q}^{(2)} \hat{f}^{(2)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \\ & \frac{1}{2} \hat{q}^{(1)2} \hat{f}^{(2)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \hat{q}^{(2)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - \\ & \hat{q}^{(1)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - \hat{q}^{(2)} \hat{f}^{(2)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + o(e^2) \end{aligned} \quad (5)$$

进一步可得

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^K \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) &= \prod_{k=1}^K f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \\ & \sum_{k_1=1}^K \left( \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K f(t_{1k_2}(q), t_{2k_2}(q)) \right) \left( \hat{q}^{(1)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - \right. \\ & \left. \hat{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) \right) + \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^K \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \left( \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K f(t_{1k_3}(q), t_{2k_3}(q)) \right) \cdot \\ & \left( \hat{q}^{(1)2} \hat{f}^{(2)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) + \hat{q}^{(2)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - \right. \\ & \left. 2 \hat{q}^{(1)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) \hat{f}^{(1)}(t_{1k_2}(q), t_{2k_2}(q)) \right) + \\ & \sum_{k_1=1}^K \left( \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K f(t_{1k_2}(q), t_{2k_2}(q)) \right) \cdot \\ & \left( \frac{1}{2} \hat{q}^{(1)2} \hat{f}^{(2)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) + \hat{q}^{(2)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - \right. \\ & \left. \hat{q}^{(1)} \hat{f}^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - \hat{q}^{(2)} \hat{f}^{(2)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) \right) + o(e^2) \end{aligned} \quad (6)$$

命题 3 的证明见附录 C。

### 3 阵列信号模型和秩减估计器简介

假设某阵列含有  $M$  个阵元, 现在阵列远场处有  $D$  个非相干的窄带信源以平面波的方式入射, 则阵列的输出响应为

$$x(t) = \sum_{k=1}^D s_k(t) b(q_k, ?_k) + n(t) = B s(t) + n(t) \quad (7)$$

其中,  $n(t)$  表示空时白的复圆高斯噪声;  $s(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_D(t)]^T$  为信源复包络, 其中,  $s_k(t)$  表示第  $k$  个信源的复包络, 这里假设它服从时域白的复圆高斯分布, 并且与噪声  $n(t)$  统计独立;  $B = [b(q_1, ?_1) \ b(q_2, ?_2) \ \dots \ b(q_D, ?_D)]$  为阵列方向矩阵, 其中,  $b(q_k, ?_k)$  表示阵列流型向量, 为了能够利用 RARE 进行方位估计, 它需要满足<sup>[4-16, 22-24]</sup>

$$b(q, ?) = T(q) ?(q, ?) \quad (8)$$

其中,  $T(q) \in C^{M \times K}$  表示仅与方位  $q$  有关的矩阵函数, 这里将其按列分块表示为  $T(q) = [t_1(q) \ t_2(q) \ \dots \ t_K(q)]$ , 而  $?(q, ?) \in C^{K \times 1}$  表示包含阵列误差参数  $?$  的列向量。

根据式(7)可知阵列协方差阵为

$$R = E[x(t)x^H(t)] = R_0 + s^2 I_M = B P B^H + s^2 I_M \quad (9)$$

其中,  $R_0 = B P B^H$  为无噪条件下的阵列协方差阵,  $P = E[s(t)s^H(t)]$  为信源协方差阵(当信源统计独立时, 是对角矩阵; 当信源统计相关但不相干时, 是正定矩阵),  $s^2$  表示噪声功率。现对矩阵  $R$  进行特征分解, 其特征值按照由大到小的顺序可假设为<sup>[17]</sup>

$$l_1 \ l_2 \ \dots \ l_D > l_{D+1} = l_{D+2} = \dots = l_M = s^2 \quad (10)$$

若令上述  $D$  个大特征值对应的单位正交特征向量分别为  $u_1, u_2, \dots, u_D$ , 并记  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_D]$ , 则理想条件下信号子空间和噪声子空间的正交投影矩阵分别为  $? = U U^H$  和  $?^\perp = I_M - U U^H$ , 相应地 RARE 空域谱为<sup>[4-16, 22-24]</sup>

$$J(q) = \det[T^H(q) ?^\perp T(q)] = \det[W(q)] \quad (11)$$

其中,  $W(q) = T^H(q) ?^\perp T(q) \in C^{K \times K}$ 。在参数满足一定条件下<sup>[4-16]</sup>, 信源方位可由下式精确获得<sup>[4-16, 22-24]</sup>

$$\{q_k\}_{k=1}^D = \arg \min_{q \in T} J(q) = \arg \min_{q \in T} \det[W(q)] \quad (12)$$

在实际计算中, 由式(9)确定的理想协方差阵是无法得到的, 只能通过有限采样获得它的一致(最大似然)估计值  $\hat{R} = \sum_{n=1}^N x(t_n)x^H(t_n)/N$ , 其中  $N$  为样本点数。若对  $\hat{R}$  进行特征分解, 则仍可得到  $D$  个较大特征值, 假设它们对应的单位正交特征向量分别为  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_D$ , 并记  $\hat{U} = [\hat{u}_1 \ \hat{u}_2 \ \dots \ \hat{u}_D]$ , 则有

限采样影响下信号子空间和噪声子空间的正交投影矩阵分别为  $\hat{\mathcal{P}} = \hat{U} \hat{U}^H$  和  $\hat{\mathcal{P}}^\perp = I_M - \hat{U} \hat{U}^H$ , 相对应的 RARE 空域谱为<sup>[4-16, 22-24]</sup>

$$\hat{J}(q) = \det[T^H(q) \hat{\mathcal{P}}^\perp T(q)] = \det[\hat{W}(q)] \quad (13)$$

其中,  $\hat{W}(q) = T^H(q) \hat{\mathcal{P}}^\perp T(q) \in C^{K \times K}$ 。此时, 信源的方位估计值可由下式获得<sup>[4-16, 22-24]</sup>

$$\{\hat{q}_k\}_{k=1}^D = \arg \min_{q \in T} \hat{J}(q) = \arg \min_{q \in T} \det[\hat{W}(q)] \quad (14)$$

由于有限采样的影响, RARE 所获得的信源方位估计值  $\{\hat{q}_k\}_{k=1}^D$  与真实值  $\{q_k\}_{k=1}^D$  之间必然产生一定偏差, 本文则将推导该偏差的闭式表达式, 从而进一步获得 RARE 的方位估计均方误差、偏置以及测向成功概率这 3 个性能参数的理论公式。

#### 4 有限采样影响下秩减估计器的方位估计性能分析

##### 4.1 正交投影矩阵的扰动分析及其统计特性

定理 1<sup>[25]</sup> 设由矩阵  $\hat{R}$  特征分解得到信号子空间和噪声子空间的正交投影矩阵分别为  $\hat{\mathcal{P}}$  和  $\hat{\mathcal{P}}^\perp$ , 则有

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P} + \mathcal{P}^{(1)} + \mathcal{P}^{(2)} + \dots + \mathcal{P}^{(n)} + \dots \\ \hat{\mathcal{P}}^\perp = \mathcal{P}^\perp - \mathcal{P}^{(1)} - \mathcal{P}^{(2)} - \dots - \mathcal{P}^{(n)} - \dots \end{cases} \quad (15)$$

其中,

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{(1)} = \mathcal{P}^\perp \mathcal{R} S + S \mathcal{R} \mathcal{P}^\perp \\ \mathcal{P}^{(n)} = -\mathcal{P}^\perp \mathcal{P}^{(n-1)} \mathcal{R} S + \mathcal{P}^\perp \mathcal{R} \mathcal{P}^{(n-1)} S - S \mathcal{R} \mathcal{P}^{(n-1)} \mathcal{P}^\perp + \\ S \mathcal{P}^{(n-1)} \mathcal{R} \mathcal{P}^\perp - \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}^{(k)} \mathcal{P}^{(n-k)} \mathcal{P}^\perp + \\ \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{P}^\perp \mathcal{P}^{(k)} \mathcal{P}^{(n-k)} \mathcal{P}^\perp \quad (n > 1) \end{cases} \quad (16)$$

其中,  $S = \sum_{k=1}^D u_k u_k^H / (l_k - s^2) = (B P B^H)^\dagger = R_0^\dagger$ 。

定理 1 的证明见文献[25], 它实质上给出了阵列协方差阵扰动量与信号(或噪声)子空间正交投影矩阵扰动量之间的闭式关系, 并且不难证明式(16)中的  $\mathcal{P}^{(n)}$  是关于协方差阵扰动量  $\mathcal{R}$  的  $n$  次矩阵函数, 因此也可以看成是  $n$  阶扰动量, 又因为  $\mathcal{R} = O(1/N^{1/2})$ , 所以有  $\mathcal{P}^{(n)} = O(1/N^{n/2})$ 。为了对 RARE 的方位估计性能进行定量分析, 本文首先基于定理 1 给出方位估计偏差与协方差阵扰动量之间

的显式关系。然而, 方位估计偏差可由不同阶数的误差扰动量累加构成, 当推导方位估计均方误差时, 通常采用一阶误差分析方法<sup>[18,19]</sup>得到方位估计偏差的一阶扰动量  $\mathcal{P}^{(1)}$ , 它可表示为  $\mathcal{P}^{(1)} = O(1/N^{1/2})$ , 而相应的均方误差又可表示为  $E[\mathcal{P}^{(1)^2}] = O(1/N)$ , 但一阶扰动量的均值为零, 所以一阶误差分析方法难以获得方位估计偏置的闭式表示。为了得到方位估计偏置的表达式, 必须采用二阶误差分析方法<sup>[20,21]</sup>推导方位估计偏差的二阶扰动量  $\mathcal{P}^{(2)}$ , 它可表示为  $\mathcal{P}^{(2)} = O(1/N)$ , 而相应的偏置又可表示为  $E[\mathcal{P}^{(2)}] = O(1/N)$ 。

为了便于理论分析, 这里需要给出关于正交投影矩阵一阶和二阶扰动量的统计特性。首先推导一阶扰动量  $\mathcal{P}^{(1)}$  的二阶统计特性, 根据文献[25]可知矩阵  $\mathcal{R}$  中的元素服从联合渐近高斯分布, 并且满足

$$\begin{cases} E[\mathcal{R}] = O_M \\ E[\mathcal{R}_{ij} \mathcal{R}_{nm}^*] = E[\mathcal{R}_{ij} \mathcal{R}_{nm}^*] = R_{im} R_{nj} / N = R_{jn}^* R_{im} / N \end{cases} \quad (17)$$

若令  $\mathcal{R} = \text{vec}(\mathcal{R})$ , 并分别记  $\hat{R} = E[\mathcal{R} \mathcal{R}^H]$  和  $\hat{R} = R^* \otimes R$ , 则有

$$\begin{aligned} E[\mathcal{R}_{ij} \mathcal{R}_{mn}^*] &= \hat{R}_{(j-1)M+i, (n-1)M+m} = R_{jn}^* R_{im} / N \\ &= \hat{R}_{(j-1)M+i, (n-1)M+m} / N \end{aligned} \quad (18)$$

于是有

$$\hat{R} = \hat{R} / N = (R^* \otimes R) / N \quad (19)$$

再令  $\mathcal{P}^{(1)} = \text{vec}(\mathcal{P}^{(1)})$ , 则根据式(16)以及矩阵恒等式  $\text{vec}(XYZ) = (Z^T \otimes X) \cdot \text{vec}(Y)$  可得

$$\mathcal{P}^{(1)} = \text{vec}(\mathcal{P}^{(1)}) = (S^* \otimes \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^\perp \otimes S) \mathcal{R} \quad (20)$$

结合式(19)可知其二阶统计量为

$$\begin{aligned} E_1 &= E[\mathcal{P}^{(1)} \mathcal{P}^{(1)H}] \\ &= (S^* \otimes \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^\perp \otimes S) \hat{R} (S^* \otimes \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^\perp \otimes S) \\ &= (S^* \otimes \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^\perp \otimes S) (R^* \otimes R) (S^* \otimes \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^\perp \otimes S) / N \\ &= s^2 (Q^* \otimes \mathcal{P}^\perp + \mathcal{P}^\perp \otimes Q) / N \end{aligned} \quad (21)$$

其中,  $Q = S R S = R_0^\dagger + s^2 R_0^\dagger^2 = \sum_{k=1}^D l_k u_k u_k^H / (l_k - s^2)^2$ ,

式(21)的成立还利用了性质  $\mathcal{P}^\perp R S = O_M$ 。

接着推导二阶扰动量  $\mathcal{P}^{(2)}$  的一阶统计特性, 根

据式(16)可给出  $\mathcal{R}^{(2)}$  的闭式表示为

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{(2)} = & -\mathcal{R}^H \mathcal{R} S + \mathcal{R}^H S - S \mathcal{R} \mathcal{R}^H + \\ & S \mathcal{R}^H \mathcal{R} - \mathcal{R}^H S + \mathcal{R}^H \mathcal{R} S - \mathcal{R}^H S \\ = & \mathcal{R}^H S^2 \mathcal{R} - S^2 \mathcal{R} \mathcal{R}^H + \mathcal{R}^H \mathcal{R} S^2 - \\ & S \mathcal{R}^H \mathcal{R} S - S \mathcal{R} S \mathcal{R}^H - \mathcal{R}^H \mathcal{R} S S \end{aligned} \quad (22)$$

根据式(17)可得等式<sup>[25]</sup>

$$E[\mathcal{R} \mathcal{R}^H] = \text{trace}(\mathbf{R} \mathbf{X}) \cdot \mathbf{R} / N$$

基于此可进一步得

$$\begin{aligned} E_2 = E[\mathcal{R}^{(2)}] = & \mathcal{R}^H \cdot E[\mathcal{R} S^2 \mathcal{R}] \cdot \mathcal{R} + \\ & S^2 \cdot E[\mathcal{R} \mathcal{R}^H] \cdot \mathcal{R} + \mathcal{R}^H \cdot E[\mathcal{R}^H \mathcal{R}] \cdot S^2 - \\ & S \cdot E[\mathcal{R} \mathcal{R}^H] \cdot S - S \cdot E[\mathcal{R} S \mathcal{R}^H] \cdot \mathcal{R} - \mathcal{R}^H \cdot E[\mathcal{R} S \mathcal{R}^H] \cdot S \\ = & s^2 (\text{trace}(\mathbf{Q}) \cdot \mathcal{R} - \text{trace}(\mathcal{R}^H \mathbf{Q}) \cdot \mathcal{R}) / N \\ = & \sum_{k=1}^D l_k s^2 \mathcal{R} / (N(l_k - s^2)^2) - s^2 (M - D) \mathbf{Q} / N \end{aligned} \quad (23)$$

式(21)和式(23)分别对于推导 RARE 的方位估计均方误差和偏置起着重要作用。

### 4.2 秩减估计器的方位估计均方误差

本节将推导 RARE 的方位估计均方误差。记

$$\begin{cases} w_{ij}(q) = f(\mathbf{t}_i^H(q), \mathbf{t}_j(q)) = \mathbf{t}_i^H(q) \mathbf{t}_j(q) \\ \hat{w}_{ij}(q) = \hat{f}(\mathbf{t}_i^H(q), \mathbf{t}_j(q)) = \mathbf{t}_i^H(q) \hat{\mathbf{t}}_j(q) \\ \mathcal{W}_{ij}^{(k)}(q) = \mathbf{t}_i^H(q) \mathcal{W}^{(k)} \mathbf{t}_j(q) = \mathcal{W}^{(k)}(\mathbf{t}_i^H(q), \mathbf{t}_j(q)) \end{cases} \quad (24)$$

根据矩阵行列式的定义可知 RARE 的空域谱为<sup>[22~24]</sup>

$$\hat{J}(q) = \det[\hat{\mathbf{W}}(q)] = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \prod_{k=1}^K \hat{w}_{i_k i_k}(q) \quad (25)$$

式中  $t(i_1, i_2, \dots, i_K)$  表示排列  $(i_1, i_2, \dots, i_K)$  的逆序数，而累加号  $\sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)}$  表示对  $1, 2, \dots, K$  的一切排列

求和，它共有  $K!$  项构成。根据式(25)可推得<sup>[23]</sup>

$$\hat{J}(q) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \sum_{k_1=1}^K \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}(q) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \hat{w}_{k_2 i_{k_2}}(q) \quad (26)$$

这里考虑第  $m$  个信源的方位估计，设  $\hat{q}_m$  是对应真实方位  $q_m$  的估计值，其一阶扰动量为  $q_m^{(1)}$ ，则有

$$\begin{cases} \hat{q}_m = q_m + q_m^{(1)} + o(1/N^{1/2}) \\ \hat{J}(\hat{q}_m) = J(q_m) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

根据命题 2 可推得

$$\begin{aligned} \hat{J}(\hat{q}_m) = & \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \sum_{k_1=1}^K \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K w_{k_2 i_{k_2}}(q_m) + \\ & q_m^{(1)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \sum_{k_1=1}^K \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathcal{W}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \cdot \\ & \left. \left( \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K w_{k_3 i_{k_3}}(q_m) + \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K w_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \right) \right. \\ & \left. \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \sum_{k_1=1}^K \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathcal{W}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \cdot \right. \\ & \left. \left( \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K w_{k_3 i_{k_3}}(q_m) + \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K w_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \right) \right) + o(1/N^{1/2}) \end{aligned} \quad (28)$$

容易验证，式(28)中等号右边第一项即为  $\hat{J}(q_m)$ ，而第二项  $q_m^{(1)}$  的系数即为  $\mathcal{J}^{(1)}(q_m)$ ，再结合式(27)可得

$$\begin{aligned} q_m^{(1)} = & \frac{1}{\mathcal{J}^{(1)}(q_m)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \cdot \\ & \sum_{k_1=1}^K \left( \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathcal{W}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K w_{k_3 i_{k_3}}(q_m) \right) \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}^{(1)}(q_m) + \\ & \left( \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K w_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \right) \mathcal{W}_{k_1 i_{k_1}}^{(1)}(q_m) = \mathbf{a}^H(q_m) \mathbf{p}^{(1)} \end{aligned} \quad (29)$$

其中， $\mathbf{a}(q) = \mathbf{a}_1(q) + \mathbf{a}_2(q)$ ， $\mathbf{a}_1(q)$  和  $\mathbf{a}_2(q)$  的表达式分别为

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1(q) = \frac{1}{\mathcal{J}^{(1)}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \cdot \\ \sum_{k_1=1}^K \left( \sum_{k_2=1}^{2(K-1)} f^{(k_2)} \cdot \mathcal{S}_{k_2} [i_1, \dots, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, \dots, i_K] \right) \mathbf{t}_{i_{k_1}}^*(q) \otimes \mathbf{t}_{i_{k_1}}(q), \\ \mathbf{a}_2(q) = \frac{1}{\mathcal{J}^{(1)}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{t(i_1, i_2, \dots, i_K)} \sum_{k_1=1}^K f^{(k_1)} \cdot \mathcal{S} [i_1, \dots, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, \dots, i_K] \cdot \\ \left( \mathbf{t}_{i_{k_1}}^*(q) \otimes \mathbf{t}_{i_{k_1}}(q) + \mathbf{t}_{i_{k_1}}^*(q) \otimes \mathcal{R}_{k_1}^*(q) \right), \end{cases} \quad (30)$$

而  $\mathcal{J}^{(1)}(q)$  的表达式为

$$\mathfrak{J}(q) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K i_k} \left( \sum_{\substack{k_1=1 \\ k_2 \neq k_1}}^{2K} f \left\{ \mathfrak{S}_{k_1 k_2} [i_1, i_2, \dots, i_K] \right\} + \sum_{k=1}^{2K} f \left\{ \mathfrak{S}_k [i_1, i_2, \dots, i_K] \right\} \right) \quad (31)$$

式中  $\mathfrak{S}_k [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}]$  和  $\mathfrak{S}_{k_1 k_2} [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}]$  分别表示矩阵  $S [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}]$  的第  $k$  列向量对  $q$  求一阶和二阶导数,  $\mathfrak{S}_{k_1 k_2} [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}]$  表示矩阵  $S [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}]$  的第  $k_1$  和  $k_2$  列向量对  $q$  求一阶导数, 而矩阵  $S [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}]$  按列分块表示为

$$S [i_{p_1}, i_{p_2}, \dots, i_{p_q}] = \begin{bmatrix} t_{p_1}(q) & t_{p_1}(q) & t_{p_2}(q) & t_{p_2}(q) & \dots & t_{p_q}(q) & t_{p_q}(q) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{M \times 2q} \quad (32)$$

此外,  $f \{\bullet\}$  是满足式(33)的标量函数:

$$f \left\{ \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{21} & t_{22} & \dots & t_{q1} & t_{q2} \end{bmatrix} \right\} = \prod_{k=1}^q t_{k1}^H t_{k2} \quad (33)$$

根据式(21)和式(29)可得第  $m$  个信源的方位估计均方误差为

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}(\hat{q}_m) &= \mathfrak{J}(q_m) + q_m^{(1)} \mathfrak{J}(q_m) - \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K i_k} \left( \sum_{k_1=1}^K \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}(q_m) + \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \right) + \\ & \frac{q_m^{(1)2}}{2} \mathfrak{J}(q_m) + q_m^{(2)} \mathfrak{J}(q_m) - \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K i_k} \left( \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}^{(2)}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}(q_m) + \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}^{(2)}(q_m) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \right) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K i_k} \left( \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}^{(1)}(q_m) \sum_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}^{(1)}(q_m) \prod_{\substack{k_4=1 \\ k_4 \neq k_1, k_2, k_3}}^K \mathfrak{w}_{k_4 i_{k_4}}(q_m) + 2 \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}^{(1)}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}^{(1)}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}(q_m) \right) - \\ & q_m^{(1)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K i_k} \left( \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \sum_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}^{(1)}(q_m) \prod_{\substack{k_4=1 \\ k_4 \neq k_1, k_2, k_3}}^K \mathfrak{w}_{k_4 i_{k_4}}(q_m) + \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}^{(1)}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}(q_m) + \right. \\ & \left. \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}^{(1)}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}(q_m) \right) - q_m^{(1)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K i_k} \left( \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}(q_m) \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}^{(1)}(q_m) \prod_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_1, k_2}}^K \mathfrak{w}_{k_3 i_{k_3}}(q_m) + \mathfrak{w}_{k_1 i_{k_1}}^{(1)}(q_m) \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \mathfrak{w}_{k_2 i_{k_2}}(q_m) \right) + o(1/N) \end{aligned} \quad (37)$$

结合式(29)和式(36)可得

$$q_m^{(2)} = q_m^{(1)} (\beta_1^H(q_m) + \beta_2^H(q_m) + \beta_3^H(q_m)) \mathfrak{p}^{(1)} + (\mathbf{a}_1^H(q_m) + \mathbf{a}_2^H(q_m)) \mathfrak{p}^{(2)} - \frac{\mathfrak{p}^{(1)}(q_m)}{2 \mathfrak{J}(q_m)} q_m^{(1)2} - \mathfrak{p}^{(1)H}(\mathbf{a}_1(q_m) + \mathbf{a}_2(q_m)) \mathfrak{p}^{(1)}$$

$$C_{mm} = E \left[ q_m^{(1)} q_m^{(1)} \right] = \mathbf{a}^H(q_m) \cdot E \left[ \mathfrak{p}^{(1)} \mathfrak{p}^{(1)H} \right] \cdot \mathbf{a}(q_m) = \mathbf{a}^H(q_m) \mathbf{E}_1 \mathbf{a}(q_m) \quad (34)$$

为了便于 4.4 节中推导 RARE 的整体测向成功概率, 这里还需要给出 RARE 的方位估计方差阵, 不妨记方位估计偏差的一阶扰动向量为  $\mathfrak{p}^{(1)} = [q_1^{(1)} q_2^{(1)} \dots q_D^{(1)}]^T$ , 令  $\mathbf{H} = [\mathbf{a}(q_1) \mathbf{a}(q_2) \dots \mathbf{a}(q_D)]$ , 则可得 RARE 的方位估计方差阵为

$$\mathbf{C} = (C_{mm})_{D \times D} = E \left[ \mathfrak{p}^{(1)} \mathfrak{p}^{(1)H} \right] = \mathbf{H}^H \mathbf{E}_1 \mathbf{H} \quad (35)$$

另一方面, 根据式(29)可知  $\mathfrak{p}^{(1)}$  是  $\mathfrak{J}$  的线性函数, 由于  $\mathfrak{J}$  中的元素服从渐近高斯分布, 所以  $\mathfrak{p}^{(1)}$  也服从渐近高斯分布, 并满足  $\mathfrak{p}^{(1)} \sim N_D(\mathbf{0}_D, \mathbf{C})$ , 这一性质对于推导 RARE 的测向成功概率起着重要作用。

### 4.3 秩减估计器的方位估计偏置

本节将推导 RARE 的方位估计偏置。考虑第  $m$  个信源的方位估计, 设  $\hat{q}_m$  是对应于真实方位  $q_m$  的估计值, 其二阶扰动量为  $q_m^{(2)}$ , 则有

$$\begin{cases} \hat{q}_m = q_m + q_m^{(1)} + q_m^{(2)} + o(1/N) \\ \mathfrak{J}(\hat{q}_m) = \mathfrak{J}(q_m) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

根据命题 3 和一些代数推导可得

$$= (\mathbf{p}^{(1)H} \mathbf{a}(q_m) \boldsymbol{\beta}^H(q_m) \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{a}^H(q_m) \mathbf{p}^{(2)} - r(q_m) \mathbf{p}^{(1)H} \mathbf{a}(q_m) \mathbf{a}^H(q_m) \mathbf{p}^{(1)} - \mathbf{p}^{(1)H} \mathbf{?}(q_m) \mathbf{p}^{(1)}) = \mathbf{p}^{(1)H} \mathbf{O}(q_m) \mathbf{p}^{(1)} + \mathbf{a}^H(q_m) \mathbf{p}^{(2)} \quad (38)$$

式中,  $\mathbf{O}(q_m) = \mathbf{a}(q_m) \boldsymbol{\beta}^H(q_m) - k(q_m) \mathbf{a}(q_m) \mathbf{a}^H(q_m) - \mathbf{?}(q_m)$ , 其中,  $k(q_m) = \frac{\mathfrak{S}^{\mathfrak{S}}(q_m)}{2\mathfrak{F}(q_m)}$ ,  $\boldsymbol{\beta}(q) = \beta_1(q) + \beta_2(q) + \beta_3(q)$  和  $\mathbf{?}(q) = \mathbf{?}_1(q) + \mathbf{?}_2(q)$ , 而  $\beta_1(q)$ 、 $\beta_2(q)$ 、 $\beta_3(q)$ 、 $\mathbf{?}_1(q)$  和  $\mathbf{?}_2(q)$  的表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} \beta_1(q) &= \frac{1}{\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K \left( 2 \sum_{k_2=1}^{2(K-1)} f^* \cdot \mathfrak{S}_{k_2} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_K] \right) \left( \mathbf{t}_{i_1}^*(q) \otimes \mathbf{t}_{k_1}(q) + \mathbf{t}_{i_1}^*(q) \otimes \mathbf{t}_{k_1}^*(q) \right) \\ \beta_2(q) &= \frac{1}{\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K f^* \cdot \mathfrak{S} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_K] \cdot \left( \mathfrak{S}_{k_1}^{\mathfrak{S}}(q) \otimes \mathbf{t}_{k_1}(q) + 2\mathfrak{t}_{i_1}^*(q) \otimes \mathbf{t}_{k_1}^*(q) + \mathbf{t}_{i_1}^*(q) \otimes \mathfrak{S}_{k_1}^{\mathfrak{S}}(q) \right) \\ \beta_3(q) &= \frac{1}{\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K \left( \sum_{k_2=1}^{2(K-1)} \sum_{\substack{k_3=1 \\ k_3 \neq k_2}}^{2(K-1)} f^* \cdot \mathfrak{S}_{k_2 k_3} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_K] \right) + \sum_{k_2=1}^{2(K-1)} f^* \cdot \mathfrak{S}_{k_2} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_K] \left( \mathbf{t}_{i_1}^*(q) \otimes \mathbf{t}_{k_2}(q) \right) \end{aligned} \right. \quad (39)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{?}_1(q) &= \frac{1}{2\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K \left( \sum_{k_3=1}^{2(K-2)} f \cdot \mathfrak{S}_{k_3} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_{k_2-1}, i_{k_2+1}, L, i_K] \right) \left( (\mathbf{t}_{k_1}^*(q) \mathbf{t}_{k_2}^T(q)) \otimes (\mathbf{t}_{i_1}(q) \mathbf{t}_{k_2}^H(q)) \right) \\ \mathbf{?}_2(q) &= \frac{1}{\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^K f \cdot \mathfrak{S} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_{k_2-1}, i_{k_2+1}, L, i_K] \cdot \\ &\quad \left( (\mathfrak{t}_{k_1}^*(q) \mathbf{t}_{i_2}^T(q)) \otimes (\mathbf{t}_{i_1}(q) \mathbf{t}_{k_2}^H(q)) + (\mathbf{t}_{k_1}^*(q) \mathbf{t}_{i_2}^T(q)) \otimes (\mathfrak{t}_{i_1}(q) \mathbf{t}_{k_2}^H(q)) \right) \end{aligned} \right. \quad (40)$$

而  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{S}}(q)$  的表达式为

$$\mathfrak{S}^{\mathfrak{S}}(q) = \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \left( \sum_{k_1=1}^{2K} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^{2K} \sum_{k_3=1}^{2K} f \cdot \mathfrak{S}_{k_1 k_2 k_3} [i_1, i_2, L, i_K] + 3 \sum_{k_1=1}^{2K} \sum_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^{2K} f \cdot \mathfrak{S}_{k_1 k_2} [i_1, i_2, L, i_K] + \sum_{k=1}^{2K} f \cdot \mathfrak{S}_k^{\mathfrak{S}} [i_1, i_2, L, i_K] \right) \quad (41)$$

其中,  $\mathfrak{S}_k^{\mathfrak{S}} [i_{p_1}, i_{p_2}, L, i_{p_q}]$  表示矩阵  $\mathfrak{S} [i_{p_1}, i_{p_2}, L, i_{p_q}]$  的第  $k$  列向量对  $q$  求三阶导数,  $\mathfrak{S}_{k_1 k_2} [i_{p_1}, i_{p_2}, L, i_{p_q}]$  表示矩阵  $\mathfrak{S} [i_{p_1}, i_{p_2}, L, i_{p_q}]$  第  $k_1$  列向量对  $q$  求一阶导数, 第  $k_2$  列向量对  $q$  求二阶导数。

根据式(23)和式(38)可得第  $m$  个信源的方位估计偏置为

$$m(q_m) = E[\mathbf{d}_m^{(2)}] = \text{trace}(\mathbf{O}(q_m) \cdot E[\mathbf{p}^{(1)} \mathbf{p}^{(1)H}]) + E[\mathbf{a}^H(q_m) \mathbf{p}^{(2)}] = \text{trace}(\mathbf{O}(q_m) \mathbf{E}_1) + g(q_m) \quad (42)$$

其中,  $g(q) = g_1(q) + g_2(q)$ , 而  $g_1(q)$  和  $g_2(q)$  的表达式分别为

$$\left\{ \begin{aligned} g_1(q) &= \frac{1}{\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K \left( \sum_{k_2=1}^{2(K-1)} f \cdot \mathfrak{S}_{k_2} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_K] \right) \left( \mathbf{t}_{k_1}^H(q) \mathbf{E}_2 \mathbf{t}_{i_1}(q) \right) \\ g_2(q) &= \frac{1}{\mathfrak{F}(q)} \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_K)} (-1)^{\sum_{k=1}^K (i_k - L - i_k)} \sum_{k_1=1}^K f \cdot \mathfrak{S} [i_1, L, i_{k_1-1}, i_{k_1+1}, L, i_K] \cdot \left( \mathbf{t}_{k_1}^H(q) \mathbf{E}_2 \mathbf{t}_{i_1}(q) + \mathbf{t}_{k_1}^H(q) \mathbf{E}_2 \mathfrak{t}_{i_1}^*(q) \right) \end{aligned} \right. \quad (43)$$

若记  $\boldsymbol{\mu} = [m(q_1) \quad m(q_2) \quad \dots \quad m(q_D)]^T$ , 则  $\boldsymbol{\mu}$  即为 RARE 的方位估计偏置向量。

### 4.4 秩减估计器的测向成功概率

除了方位估计均方误差和偏置外，测向成功概率也是超分辨率谱估计算法的一项重要性能指标，然而相关的理论研究报道并不多见，笔者曾在文献[27]中推导了模型误差影响下 MUSIC 算法测向成功概率的计算公式，此外，还在文献[23]中推导了未预期模型误差影响下 RARE 的测向成功概率的计算公式，而本节则将基于文献[23]和文献[27]中的分析方法推导有限采样影响下 RARE 的测向成功概率。所不同的是，文献[23]和文献[27]中并未考虑方位估计偏置，而本文考虑了偏置的影响。

在推导 RARE 的测向成功概率之前，需要首先确定 RARE 方位估计偏差的分布特性，根据前面的讨论可知其一阶扰动量服从渐近高斯分布，但其二阶扰动量的概率分布则很难严格推导。文献[28,29]在推导高斯模型误差影响下 MUSIC 算法的角度分辨概率和方位估计统计特性时，根据李雅普诺夫中心极限定理认为由模型误差二次项构成的分量也近似服从高斯分布，因此 MUSIC 算法的空域谱及其方位估计偏差也可近似认为服从高斯分布。事实上，在有限采样影响下，方位估计偏差的一阶项仍占据主导地位，而二阶项的讨论可类似于文献[28,29]中的分析方法，于是这里不妨将 RARE 的方位估计偏差也近似看作为服从渐近高斯分布，并且其方差阵为  $C$ （由一阶误差分析方法获得），而均值向量为  $\mu$ （由二阶误差分析方法获得），即其方位估计偏差向量满足  $\% \sim N_D(\mu, C)$ 。需要指出的是，文献[30]在推导有限采样影响下 MUSIC 算法的角度分辨概率时也曾做过类似的近似假设，于是能够将角度分辨概率的计算转化为高斯概率密度函数的积分运算，其中的仿真实验也验证了其合理性，而本文第 5 节的仿真实验也将验证上述高斯假设的有效性。本文在明确 RARE 方位估计偏差分布特性的基础上，下面将采用文献[23]和文献[27]中给出的关于“测向成功”的定义方式，分别推导针对单个信源和针对整体的测向成功概率。

#### 4.4.1 针对单个信源的测向成功概率

定义 1<sup>[23,27]</sup> 对于第  $m$  个信源，若满足条件 “  $\left\| \begin{matrix} \% \\ q_m \end{matrix} \right\| \Delta q$  ”，则认为是“测向成功”。

定义 1 中的  $\Delta q$  表示角度误差容限，根据前面的讨论可近似认为  $q_m^{\%} \sim N_1(m_m, C_{mm})$ ，于是第  $m$  个信源的测向成功概率为

$$\Pr \left\{ \left\| \begin{matrix} \% \\ q_m \end{matrix} \right\| \Delta q \right\} = F \left( \frac{\Delta q - m_m}{\sqrt{C_{mm}}} \right) - F \left( -\frac{\Delta q + m_m}{\sqrt{C_{mm}}} \right) \quad (44)$$

其中， $F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-x^2/2} dx$ ，其数值可查表获得。

#### 4.4.2 针对整体的测向成功概率

定义 2<sup>[23,27]</sup> 若满足条件 “  $\max_{1 \leq m \leq D} \left\| \begin{matrix} \% \\ q_m \end{matrix} \right\| \Delta q$  ”，则认为是“第一类整体测向成功”。

显然，为了计算第一类整体测向成功概率需要明确  $D$  个信源方位估计偏差  $q_1^{\%}, q_2^{\%}, \dots, q_D^{\%}$  的联合概率密度函数，根据前面的分析可知随机向量  $\%$  的概率密度函数可近似表示为

$$p_{\%}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} |\det[C]|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^T C^{-1} (x-\mu)}{2} \right\} \quad (45)$$

于是第一类整体测向成功概率为

$$\Pr \left\{ \max_{1 \leq k \leq D} \left\| \begin{matrix} \% \\ q_k \end{matrix} \right\| \Delta q \right\} = \int_{-\Delta q}^{\Delta q} \int_{-\Delta q}^{\Delta q} \dots \int_{-\Delta q}^{\Delta q} p_{\%}(x) dx_1 dx_2 \dots dx_D \quad (46)$$

式(46)实质上是立方体上的高维积分问题，它可通过数值积分的方法获得其数值解。

定义 3<sup>[23,27]</sup> 若满足条件 “  $\sqrt{\frac{1}{D} \sum_{m=1}^D q_m^2} \Delta q$  ”，

则认为是“第二类整体测向成功”。

显然，第二类整体测向成功概率可表示为  $\Pr \left\{ \left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2 \leq D(\Delta q)^2 \right\}$ ，为了计算此概率，需要推导随机变量  $\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2$  的分布函数。根据前面的讨论可将  $\%$  近似表示为  $\% = C^{1/2} \%_0$ ，式中 “ $=$ ” 表示等式两边服从相同的概率分布，而  $\%_0 \sim N_D(C^{-1/2} \mu, I_D)$ ，于是可得  $\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2 = \%_0^T C \%_0$ ，即将  $\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2$  表示成关于高斯随机向量  $\%_0$  的二次型，为了计算  $\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2$  的分布函数，可利用文献[31]中给出的关于随机变量分布函数和特征函数关系的公式：

$$\Pr \left\{ \left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2 \leq e \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Im} \left\{ e^{-ietj} \mathbb{F}_{\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2}(t) \right\} dt \quad (47)$$

其中， $e = D(\Delta q)^2$ ，而  $j \mathbb{F}_{\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2}(t)$  是  $\left\| \begin{matrix} \% \\ \end{matrix} \right\|_2^2$  的特征函数，它是计算整体测向成功概率的关键。假设矩阵  $C$  的  $D$  个非零特征值分别为  $r_1, r_2, \dots, r_D$ ，相应的单位

正交特征向量分别为  $e_1, e_2, \dots, e_D$ ，则根据命题 1 可得

$$j_{\mathbb{R}^D} (t) = \prod_{k=1}^D (1 + 4r_k^2 t^2)^{-1/4} \cdot \exp \left\{ -2d_k r_k^2 t^2 / (1 + 4r_k^2 t^2) \right\} \cdot \exp \left\{ i \left( \arctan (2r_k t) / 2 + d_k r_k t / (1 + 4r_k^2 t^2) \right) \right\} \quad (48)$$

其中， $d_k = (e_k^T C^{-1/2} \mu)^2$ ，将式(48)代入式(47)中可进一步得

$$\Pr \left\{ \left\| \hat{\mu} \right\|_2^2 = e \right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \{g(t)\}}{h(t)} dt \quad (49)$$

其中，

$$\begin{cases} g(t) = \sum_{k=1}^D \left( \arctan (2r_k t) / 2 + d_k r_k t / (1 + 4r_k^2 t^2) \right) - e t \\ h(t) = \prod_{k=1}^D (1 + 4r_k^2 t^2)^{1/4} \cdot \exp \left\{ 2d_k r_k^2 t^2 / (1 + 4r_k^2 t^2) \right\} \end{cases} \quad (50)$$

显然，式(49)中的积分只能通过数值计算的方法获得其数值解，为了计算该数值解，还需要考虑其中的积分函数在  $t \rightarrow 0$  和  $t \rightarrow +\infty$  时的数值。首先根据洛必达法则容易验证

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{\sin \{g(t)\}}{h(t)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \{g(t)\} g'(t)}{h(t) + t h'(t)} = \frac{g'(0)}{h(0)} \\ &= \sum_{k=1}^D r_k (1 + d_k) - e \end{aligned} \quad (51)$$

当  $t \rightarrow +\infty$  时，由于积分函数的分子有界，分母将按照递增的方式趋于无穷大，因此该积分函数将以较快的速度趋于零，于是在进行数值计算时，只需要将积分上限设置为一个足够大的正数即可。至此，可给出计算第二类整体测向成功概率的计算方法。

步骤 1 利用式(35)计算矩阵  $C$ ，根据式(42)计算向量  $\mu$ 。

步骤 2 对  $C$  进行特征分解，从而获得其  $D$  个特征值  $\{r_k\}_{k=1}^D$  和相应的单位正交特征向量  $\{e_k\}_{k=1}^D$ 。

步骤 3 根据特征向量计算标量因子  $d_k = (e_k^T C^{-1/2} \mu)^2$  ( $k=1, 2, \dots, D$ )。

步骤 4 利用数值积分的方法计算式(49)。

至此，本节已经给出了针对单个信源的测向成功概率和两类整体测向成功概率的计算方法，而根据文献[23]和文献[27]中的讨论可知：1)第一类整体测向成功概率一定不大于单个信源的测向成功概

率；2)第一类整体测向成功概率必然小于第二类整体测向成功概率，这些结论由它们的定义方式所决定。下面将通过一系列仿真实验验证文中理论推导的有效性。

### 5 数值实验

这里先做以下几点说明：1)下面是针对文献[4,5]提出的均匀阵列互耦自校正 RARE 和文献[13]提出的辅助阵元法给出的数值实验；2)尽管 MUSIC 算法也是一种特殊的 RARE，但在下文的数值实验中都同时给出了 RARE 和 MUSIC 算法的性能曲线，并且若不做特殊说明，下文的 MUSIC 算法是在不存在任何阵列误差的条件下进行的；3)计算测向成功概率的误差容限  $\Delta q$  均设为  $0.5^\circ$ ；4)文中所有仿真图中的连续曲线都是理论预测值，即根据文中的理论推导计算所得，而离散点都是仿真实验值(2 000 次 Monte Carlo 独立实验统计结果)。

#### 5.1 针对仅存在单个信源的仿真实验

本节将针对文献[5]提出的均匀圆阵互耦自校正 RARE 给出数值实验，假设阵列流型为八元均匀圆阵，并且相邻 3 个阵元之间产生互耦效应，即文中的  $K=3$ ，其互耦因子分别为 1、0.12-0.18i 和 -0.05+0.06i，现仅有单个信源到达该阵列，信源方位为  $50^\circ$ 。首先，固定半径波长比为 1，图 1 分别给出了 RARE 和 MUSIC 算法的方位估计均方根误差、偏置以及测向成功概率随着信噪比的变化曲线；接着，固定信噪比为 10dB，图 2 分别给出了 RARE 和 MUSIC 算法的方位估计均方根误差、偏置以及测向成功概率随着半径波长比的变化曲线。

从图 1 和图 2 中可以得到如下结论：1)在上述数值实验条件下，3 种性能参数的理论值和仿真实验值能够较好地吻合，从而验证了文中理论推导的有效性；2)无论 RARE 还是 MUSIC 算法，它们的方位估计精度都随着信噪比和采样点数的增大而提高；3)对于 MUSIC 算法而言，其方位估计精度随着半径波长比的增大而提高，但对于 RARE 而言，其方位估计精度的变化规律则复杂得多，3 种性能参数并不是简单地关于半径波长比的单调函数，在上述数值实验条件下，当半径波长比从 0.8 增至 0.9 时，RARE 的性能会迅速下降，而当半径波长比大于 0.9 时，RARE 的性能又会迅速提高，这一特性由 RARE 复杂的空域谱函数所决定；4)在上述数值

实验条件下, MUSIC 算法的方位估计偏置都接近于零,然而 RARE 却并非如此,从图 1(b)中可以看出,当半径波长比固定为 1 时,若信噪比低于 12dB, RARE 就会存在偏置,而从图 2(b)中可以看出,当信噪比固定 10dB 时, RARE 会在半径波长比取值范围为 0.8~1 之间产生一定偏置;5)在上述数值实验条件下, MUSIC 算法的方位估计精度在绝大多数情况下优于 RARE,但从图 2(a)中可以看出,当信噪比固定 10dB 且半径波长比大于 1.2 时, RARE 的方位估计均方误差却略小于 MUSIC 算法。

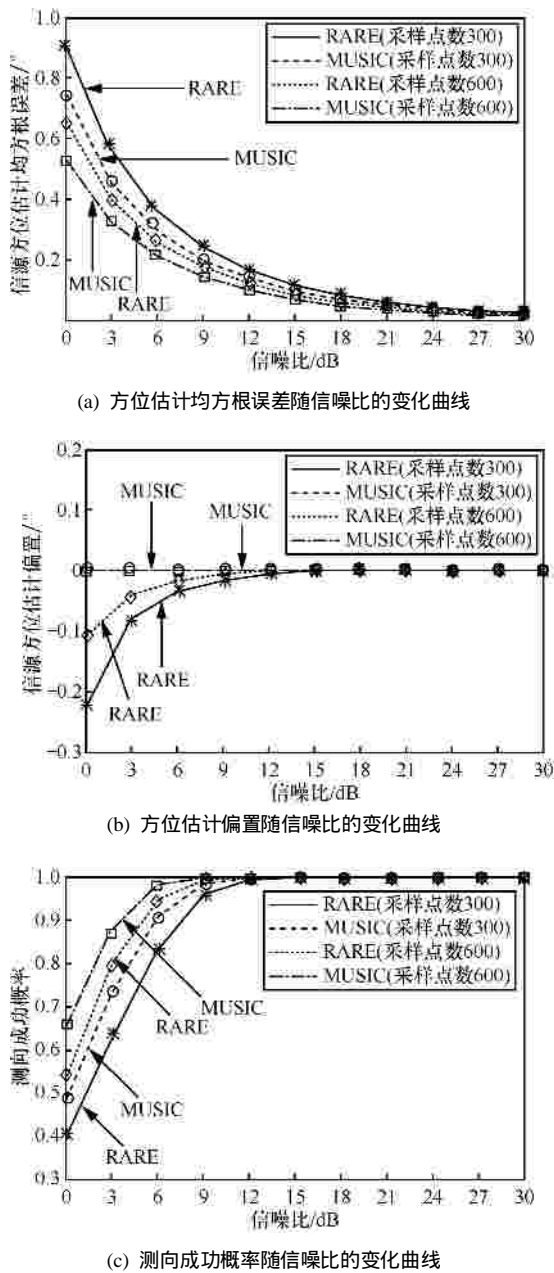


图 1 方位估计均方根误差、方位估计偏置、测向成功概率随信噪比的变化

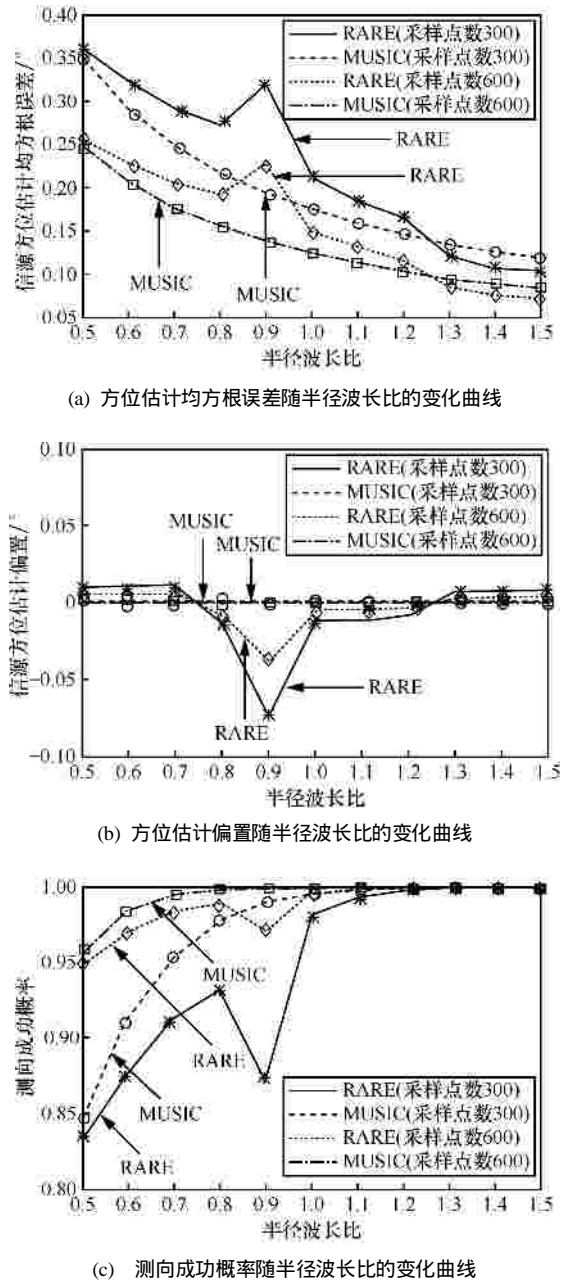


图 2 方位估计均方根误差、方位估计偏置、测向成功概率随半径波长比的变化

这一结论似乎有悖于常理,但仔细分析则并非如此。正如本节开头所指,文中的 MUSIC 算法是在没有任何阵列误差的条件下进行的,在此处就是指没有互耦效应,因此 RARE 和 MUSIC 算法所处理的数据模型是不同的,所以在某些参数条件下 RARE 的方位估计均方误差反而小于 MUSIC 算法是有可能出现的。事实上,若 RARE 与互耦存在的已知的 MUSIC 算法进行比较,则根据信息论原理可知前者的性能将始终低于后者,因为此时它们两者所处理的数据模型是一样的,这里不妨将 RARE

和互耦存在且已知的 MUSIC 算法进行比较，实验条件同图 2(b)，并将采样点数固定为 300，表 1 给出了它们的方位估计均方根误差的理论数值，从表中可以看出 RARE 的方位估计均方根误差始终大于互耦存在的已知的 MUSIC 算法。

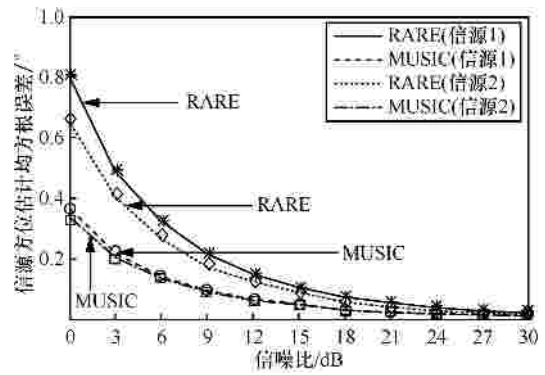
表 1 方位估计均方根误差的理论数值

半径波长比	方位估计均方根误差/ $^\circ$	
	RARE	互耦存在且已知的 MUSIC 算法
0.5	0.365 2	0.359 5
0.6	0.328 3	0.322 9
0.7	0.293 6	0.287 0
0.8	0.270 5	0.245 8
0.9	0.325 9	0.204 8
1.0	0.213 5	0.170 9
1.1	0.187 3	0.145 7
1.2	0.167 6	0.127 6
1.3	0.121 4	0.114 7
1.4	0.107 7	0.105 6

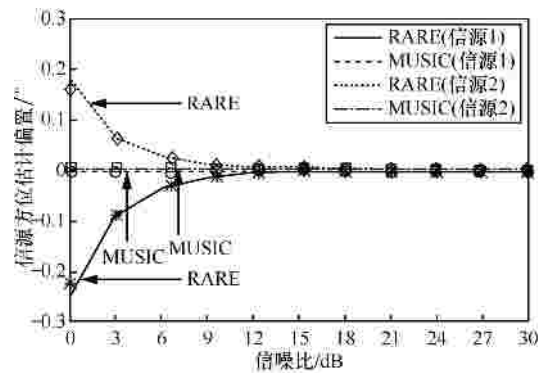
### 5.2 针对存在 2 个信源的仿真实验

本节首先针对文献[4]提出的均匀线阵互耦自校正 RARE 给出数值实验，假设阵列流型为九元均匀线阵，相邻阵元间距与波长比为 0.5，并且相邻 3 个阵元之间产生互耦效应，其互耦因子同上，现有 2 个等功率相关但不相干信源到达该阵列，它们的相关系数为  $0.1e^{ip/6}$ ，信源方位(指与线阵夹角)分别为  $64^\circ$  和  $82^\circ$ ，采样点数为 500。图 3 分别给出了 RARE 和 MUSIC 算法的方位估计均方根误差、偏置、针对单个信源的测向成功概率和整体测向成功概率随着信噪比的变化曲线。

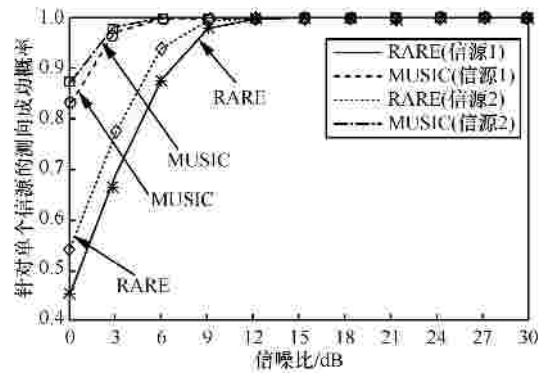
接着针对文献[13]提出的辅助阵元法给出数值实验，假设阵列流型为六元均匀线阵，相邻阵元间距与波长比为 0.5，其中前 4 个阵元为辅助阵元，即不存在任何幅相误差，并且阵元的幅度因子均设为 1，相位因子均设为  $0^\circ$ ，而后 2 个阵元存在方位依赖的幅相误差 现有 2 个等功率相关但不相干信源到达该阵列，它们的相关系数为  $0.1e^{ip/6}$ ，信源方位(指与线阵夹角)分别为  $65^\circ$  和  $85^\circ$ ，并且后 2 个阵元对应信源 1 的幅度因子为 1.32 和 0.78，相位因子为  $28.7^\circ$  和  $-23.8^\circ$ ，对应信源 2 的幅度因子为 0.86 和 1.25，相位因子为  $-14.6^\circ$  和  $16.5^\circ$ ，采样点数仍设为 500。图 4 分别给出了 RARE 和 MUSIC 算法的方位估计均方根误差、偏置、针对单个信源的测向成功概率和整体测向成功概率随着信噪比的变化曲线。



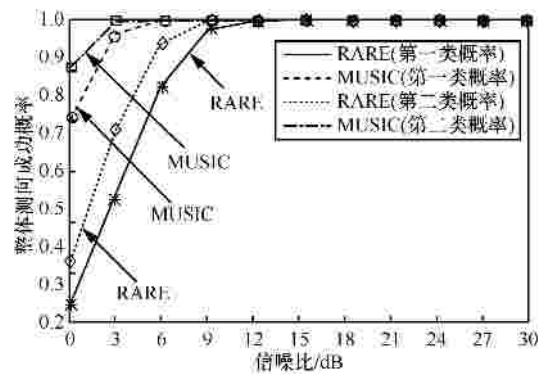
(a) 方位估计均方根误差随信噪比的变化曲线



(b) 方位估计偏置随信噪比的变化曲线

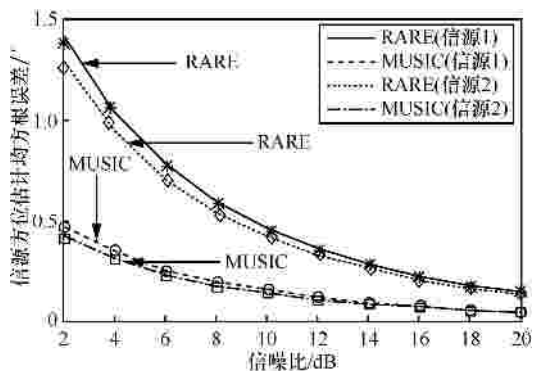


(c) 针对单个信源的测向成功概率随信噪比的变化曲线

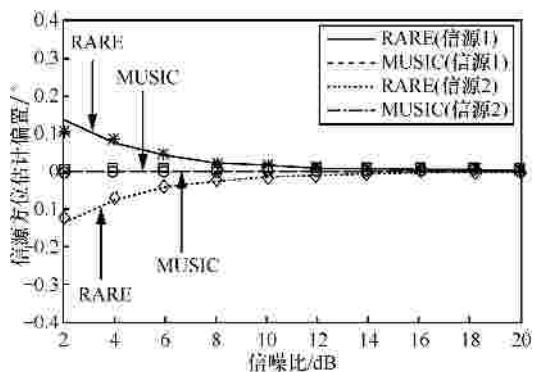


(d) 整体测向成功概率随信噪比的变化曲线

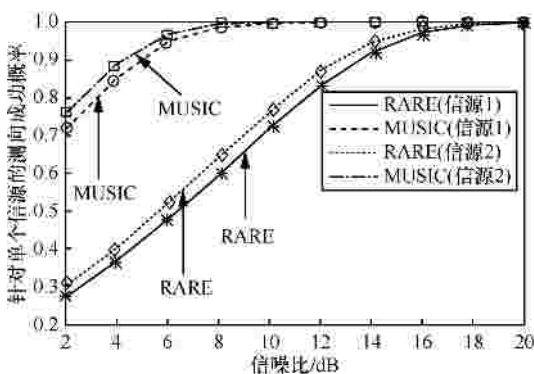
图 3 方位估计均方根误差、方位估计偏置、单信源的测向成功率、整体测向成功率随信噪比的变化



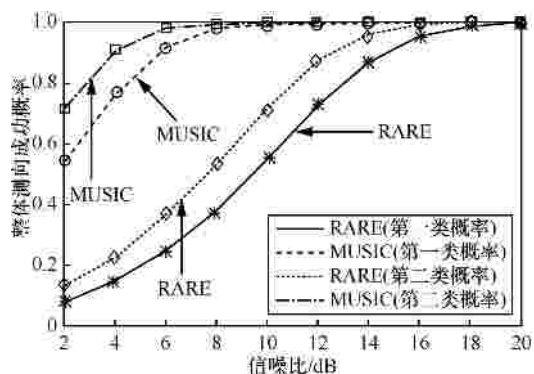
(a) 方位估计均方根误差随信噪比的变化曲线



(b) 方位估计偏置随信噪比的变化曲线



(c) 针对单信源的测向成功率随信噪比的变化曲线



(d) 整体测向成功率随信噪比的变化曲线

图 4 方位估计均方根误差、方位估计偏置、单信源的测向成功率、整体测向成功率随信噪比的变化曲线

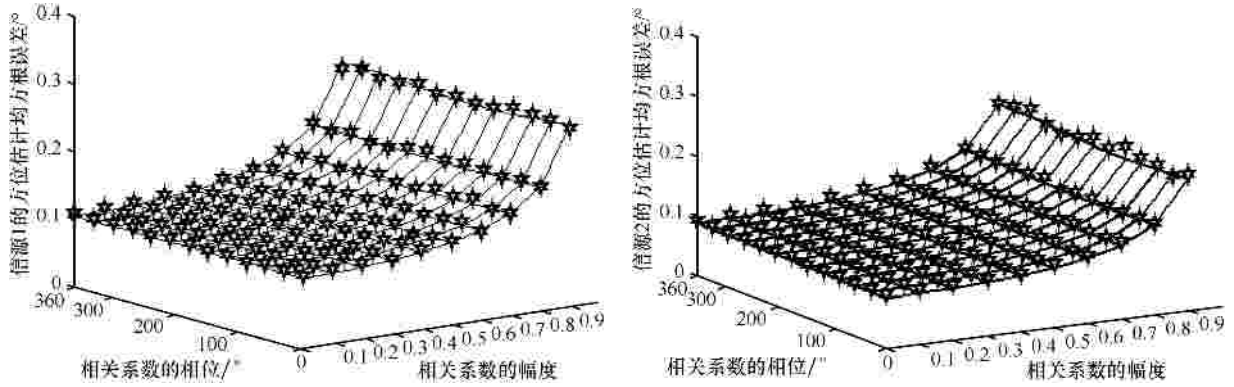
从图 3 和图 4 中可以得到如下结论：1)在上述数值实验条件下，3 种性能参数的理论值和仿真实验值仍能较好地吻合，从而进一步验证了文中理论推导的有效性；2)无论是 RARE 还是 MUSIC 算法，它们的方位估计精度仍都随着信噪比的增大而提高；3)在上述数值实验条件下，MUSIC 算法的方位估计精度始终优于 RARE；4)在上述数值实验条件下，当信噪比较低时，RARE 会产生一些偏置，然而 MUSIC 算法的偏置则仍基本接近于零，只是在图 3(b)中，当信噪比小于 3dB 时，MUSIC 算法会有约 0.01° 的偏置，事实上，无论是 RARE 还是 MUSIC 算法，当参数条件往坏的方向发展时，它们都会逐渐产生偏置，只是相比而言，RARE 更容易出现偏置；5)第一类整体测向成功概率始终不会高于单个信源的测向成功概率，并且第一类整体测向成功概率始终小于第二类整体测向成功概率，这一结论符合文献[23]和文献[27]中的分析结果。

最后，通过仿真实验反映信源相关系数对 RARE 性能的影响，第 1 个实验的仿真条件基本同图 3，只是固定信噪比为 15dB，图 5 给出了 RARE 的方位估计均方根误差随着信源相关系数幅度和相位因子的变化曲面。第 2 个实验的仿真条件基本同图 4，固定信噪比仍为 15dB，图 6 给出了 RARE 的方位估计均方根误差随着信源相关系数幅度和相位因子的变化曲面。

从图 5 和图 6 中不难看出：相关系数的相位因子对 RARE 性能的影响非常小，但相关系数的幅度因子对 RARE 的性能会产生一定影响，尤其当幅度因子大于 0.8 时，RARE 的性能会迅速恶化，这是由于相关系数的幅度因子决定了两信源之间的相关性，这一变化规律与 MUSIC 算法也是一致的(它们都是基于子空间技术提出的算法)。

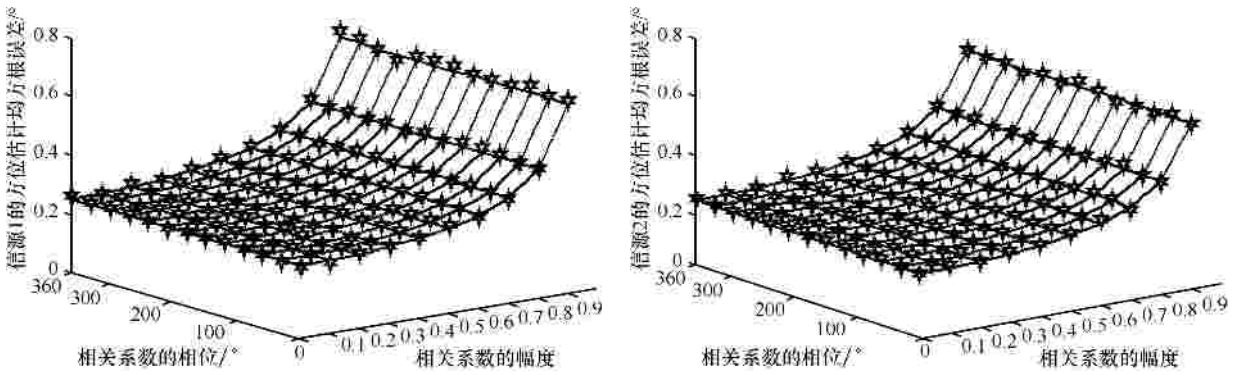
### 6 结束语

本文从理论上定量分析了有限采样影响下 RARE 的方位估计性能，基于文献[25]中给出的信号(或噪声)子空间正交投影矩阵的扰动定理，推导了 RARE 方位估计偏差的一阶和二阶扰动量，在此基础上分别给出了其方位估计均方误差、偏置以及测向成功概率的理论表达式。针对文献[4,5]中的均匀阵列互耦自校正 RARE 和文献[13]中的辅助阵元法给出了数值实验，仿真结果验证了理论推导的有效性。本文的结论对于 RARE 的工程应用具有一定指导意义。



(a) 信源 1 的方位估计均方根误差随着相关系数的变化曲线 (b) 信源 2 的方位估计均方根误差随着相关系数的变化曲线

图 5 第 1 个实验下，方位估计均方根误差随着相关系数的变化曲线



(a) 信源 1 的方位估计均方根误差随着相关系数的变化曲线 (b) 信源 2 的方位估计均方根误差随着相关系数的变化曲线

图 6 第 2 个实验下，方位估计均方根误差随着相关系数的变化曲线

### 附录 A 对命题 1 的证明

附录 A 将对命题 1 进行简单证明。先对矩阵  $A$  进行特征分解可得  $A = \sum_{k=1}^m r_k e_k e_k^T$ ，于是有

$$y = x^T A x = \sum_{k=1}^m r_k (e_k^T x)^2 = \sum_{k=1}^m r_k c_k^2(1, d_k) \quad (52)$$

其中， $d_k = (e_k^T \mu)^2$ 。由于当  $k \neq l$  时，满足  $\text{cov}[e_k^T x, e_l^T x] = e_k^T e_l = 0$ ，即  $e_k^T x$  与  $e_l^T x$  不相关，对于 2 个高斯随机变量而言，不相关就意味着统计独立，于是式(52)中的  $c_k^2(1, d_k)$  与  $c_l^2(1, d_l)$  也可认为是相互统计独立。根据引理 1 可知  $c_k^2(1, d_k)$  的特征函数为

$$j_{c_k^2(1, d_k)}(t) = (1 - 2it)^{-1/2} \cdot \exp[-id_k t / (1 - 2it)] = (1 + 4t^2)^{-1/4} \cdot \exp[-2d_k t^2 / (1 + 4t^2)] \cdot \exp[i \arctan(2t) / 2 + d_k t / (1 + 4t^2)] \quad (53)$$

又因为相互独立随机变量和的特征函数等于各自特征函数的乘积，所以随机变量  $y$  的特征函数可由式(2)确定。

### 附录 B 对命题 2 的证明

附录 B 将对命题 2 进行证明。先证明式(3)，对向量  $t_{1k}(\hat{q})$  和  $t_{2k}(\hat{q})$  进行一阶 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} & \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) \\ &= (t_{1k}^H(q) + q^{(1)} t_{1k}^H(q)) (t_{2k}^H(q) + q^{(1)} t_{2k}^H(q)) + o(e) \\ &= t_{1k}^H(q) t_{2k}^H(q) + q^{(1)} (t_{1k}^H(q) t_{2k}^H(q) + t_{1k}^H(q) t_{2k}^H(q)) - \\ & \quad t_{1k}^H(q) t_{2k}^H(q) + o(e) \\ &= f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + q^{(1)} f^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - f^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + o(e) \end{aligned} \quad (54)$$

式(4)可通过数学归纳法进行证明，当  $K = 2$  时显然成立，假设当  $K = n - 1$  时结论成立，则当  $K = n$  时可得

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) &= \left( \prod_{k=1}^{n-1} \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) \right) \hat{f}(t_{1n}(\hat{q}), t_{2n}(\hat{q})) \\ &= \prod_{k=1}^n f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \left( \prod_{k=1}^{n-1} f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) \right) \cdot \\ & \quad (q^{(1)} f^{(1)}(t_{1n}(q), t_{2n}(q)) - f^{(1)}(t_{1n}(q), t_{2n}(q))) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1=1}^{n-1} \left( \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^n f(t_{1k_2}(q), t_{2k_2}(q)) \right) \left( d^{(1)} j^k(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - \right. \\ & \left. j^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) \right) + o(e) \\ & = \prod_{k=1}^n f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \sum_{k_1=1}^n \left( \prod_{\substack{k_2=1 \\ k_2 \neq k_1}}^n f(t_{1k_2}(q), t_{2k_2}(q)) \right) \cdot \\ & \left( d^{(1)} j^k(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) - j^{(1)}(t_{1k_1}(q), t_{2k_1}(q)) \right) + o(e) \quad (55) \end{aligned}$$

根据式(55)可知当  $K = n$  时式(4)成立, 因此命题 2 成立。

### 附录 C 对命题 3 的证明

附录 C 将对命题 3 进行证明。先证明式(5), 对向量  $t_{1k}(\hat{q})$  和  $t_{2k}(\hat{q})$  进行二阶 Taylor 展开可得

$$\begin{aligned} \hat{f}(t_{1k}(\hat{q}), t_{2k}(\hat{q})) &= \left( t_{1k}^H(q) + (d^{(1)} + d^{(2)})^H t_{1k}(q) + \frac{1}{2} d^{(1)2} t_{1k}^H(q) \right) \\ & \left( ?^{\perp} - j^{(1)} - j^{(2)} \right) \left( t_{2k}(q) + (d^{(1)} + d^{(2)})^H t_{2k}(q) + \frac{1}{2} d^{(1)2} t_{2k}^H(q) \right) + o(e^2) \\ &= t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q) + d^{(1)} (t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q) + \\ & t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q)) - t_{1k}^H(q) j^{(1)} t_{2k}(q) + \\ & \frac{1}{2} d^{(1)2} (t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q) + 2 t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q) + t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q)) + \\ & d^{(2)} (t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q) + t_{1k}^H(q) ?^{\perp} t_{2k}(q)) - \\ & d^{(1)} (t_{1k}^H(q) j^{(1)} t_{2k}(q) + t_{1k}^H(q) j^{(2)} t_{2k}(q)) - t_{1k}^H(q) j^{(2)} t_{2k}(q) + o(e^2) \\ &= f(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + d^{(1)} j^k(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - j^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + \\ & \frac{1}{2} d^{(1)2} j^k(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + d^{(2)} j^k(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - \\ & d^{(1)} j^{(1)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) - j^{(2)}(t_{1k}(q), t_{2k}(q)) + o(e^2) \quad (56) \end{aligned}$$

式(6)的证明过程类似于式(4), 可通过数学归纳法进行证明, 鉴于篇幅考虑这里不再详细描述。

### 参考文献:

[1] FRIEDLANDER B, WEISS A J. Direction finding in the presence of mutual coupling[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1991, 39(3):273-284.  
 [2] SELLONE F, SERRA A. A novel mutual coupling compensation algorithm for uniform and linear arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2007, 55(2):560-573.  
 [3] WIJNHOLDS S J, VEEN A J. Multisource self-calibration for sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(9): 3512-3522.  
 [4] WANG B H, WANG Y L, CHEN H. Robust DOA estimation and array calibration in the presence of mutual coupling for uniform linear array[J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2004, 47(3): 348-361.  
 [5] QI C, WANG Y, ZHANG Y, et al. DOA estimation and self-calibration algorithm for uniform circular array[J]. Electronics Letters, 2005,

41(20):1092-1094.  
 [6] 吴彪, 陈辉, 杨春华. 基于 L 型阵列的方位估计及互耦自校正算法研究[J]. 电子学报, 2010, 38(6):1316-1322.  
 WU B, CHEN H, YANG C H. Study of DOA estimation and self-calibration algorithm for L-shaped array in the presence of mutual coupling[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(6):1316-1322.  
 [7] LIANG J L, ZENG X J, WANG W Y, et al. L-shaped array-based elevation and azimuth direction finding in the presence of mutual coupling[J]. Signal Processing, 2011, 91(5):1319-1328.  
 [8] 吴彪, 陈辉, 胡晓琴. 基于 Y 型阵的互耦矩阵与 DOA 的同时估计方法[J]. 通信学报, 2010, 31(6):119-126.  
 WU B, CHEN H, HU X Q. Simultaneous estimation of mutual coupling matrix and DOA for Y-shaped array[J]. Journal on Communications, 2010, 31(6):119-126.  
 [9] HU X Q, CHEN H, WANG Y L, et al. A self-calibration algorithm for cross array in the presence of mutual coupling[J]. Science China Information Sciences, 2011, 54(4):836-848.  
 [10] LIU C, YE Z F, ZHANG Y F. Autocalibration algorithm for mutual coupling of planar array[J]. Signal Processing, 2010, 90(3):784-794.  
 [11] CHEN H, BAO Z. Performance analysis of self-calibration algorithm for concentric-UCA[A]. Proceedings of the International Conference on Wireless Communications and Signal Processing[C]. Suzhou, China, IEEE Press, 2010. 1-5.  
 [12] XIANG L, YE Z, XU X, et al. Direction of arrival estimation for uniform circular array based on fourth-order cumulants in the presence of unknown mutual coupling[J]. IET Microwaves, Antennas and Propagation, 2008, 2(3):281-287.  
 [13] WANG B H, WANG Y L, CHEN H, GUO Y. Array calibration of angularly dependent gain and phase uncertainties with car y-on instrumental sensors[J]. Science in China Series F, 2004, 47(6): 777-792.  
 [14] PESAVENTO M, GERSHMAN A B, WONG K M. Direction finding in partly calibrated sensor arrays composed of multiple subarrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(9):2103-2115.  
 [15] SEE C M S, GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(2):329-338.  
 [16] QI C Y, CHEN Z J, ZHANG Y S. DOA estimation and self-calibration algorithm for multiple subarrays in the presence of mutual coupling[A]. IEEE Proceedings on Radar, Sonar and Navigation[C]. 2006.333-337.  
 [17] SCHMIDT R O. Multiple emitter location and signal parameter estimation[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1986, 34(3):267-280.  
 [18] STOICA P, NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1989, 37(5):720-741.  
 [19] STOICA P, NEHORAI A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramer-Rao bound:further results and comparisons[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1990, 38(12):2140-2150.  
 [20] XIAO L X, BUCKLEY K M. Bias analysis of the MUSIC location estimator[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(10):2559-2569.  
 [21] LI F, LU Y. Unified bias analysis of subspace-based DOA estimation

- algorithms[J]. Control and Dynamic Systems, 1996, 77:149-192.
- [22] 王鼎, 吴瑛. 未预期模型误差影响下秩减估计空域谱的统计特性及分辨概率[J]. 应用科学学报, 2011, 29(2):176-186.  
WANG D, WU Y. Statistical characteristics and resolution probability of rank reduction spatial spectrum in the presence of unexpected model errors[J]. Journal of Applied Sciences, 2011, 29(2):176-186.
- [23] 王鼎, 吴瑛. 未预期模型误差影响下秩减估计器的性能分析[J]. 通信学报, 2011, 32(8):81-90.  
WANG D, WU Y. Performance analysis of rank reduction estimator in the presence of unexpected modeling errors[J]. Journal on Communications, 2011, 32(8):81-90.
- [24] WANG D, WU Y. Effects of finite samples on the resolution performance of the rank reduction estimator[J]. Science China Information Sciences, 2013, 56(1):1-14.
- [25] KRIM H, FORSTER P, PROAKIS J G. Operator approach to performance analysis of root-MUSIC and root-min-norm[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1992, 40(7):1687-1696.
- [26] 张润楚. 多元统计分析[M]. 北京:科学出版社, 2006.32-33.  
ZHANG R C. Multivariate Statistical Analysis[M]. Beijing:Publishing House of Science, 2006.32-33.
- [27] 王鼎, 吴瑛. 模型误差条件下 MUSIC 算法的测向成功概率[J]. 应用科学学报, 2010, 28(3):289-296.  
WANG D, WU Y. Success probability of direction-finding of MUSIC algorithm with modeling errors[J]. Journal of Applied Sciences, 2010, 28(3):289-296.
- [28] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modeling errors, taking into account the resolution probability[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8):4156-4166.
- [29] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5):1945-1953.
- [30] HARRY B, MICHAELS W. Statistical characterization of the MUSIC null spectrum[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1991, 39(6):1333-1347.
- [31] DUGINA T N, MARTYNOV G V. Computing the distribution function of the ratio of quadratic forms in normal variables[J]. Journal of Mathematical Sciences, 1991, 53(6):628-631.

#### 作者简介：



王鼎(1982-), 男, 安徽芜湖人, 解放军信息工程大学讲师, 主要研究方向为现代信号处理。

姚晖(1985-), 男, 江西上饶人, 解放军信息工程大学博士生, 主要研究方向为阵列信号处理。

吴瑛(1960-), 女, 河南郑州人, 解放军信息工程大学教授、博士生导师, 主要研究方向为通信中的现代信号处理。